

Curs 13

Programarea liniară: algoritmul simplex (II)

Modelarea și analiza datelor pentru decizii de management

Conf.dr.ing. Lăcrimioara GRAMA

Anul 2 master · Tehnologii, Sisteme și Aplicații pentru eActivități

Facultatea de Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Suport curs MADDM · Lăcrimioara Grama · [CC BY-NC-SA 4.0](#)



Cursul precedent

Programarea liniară: algoritmul simplex (I)

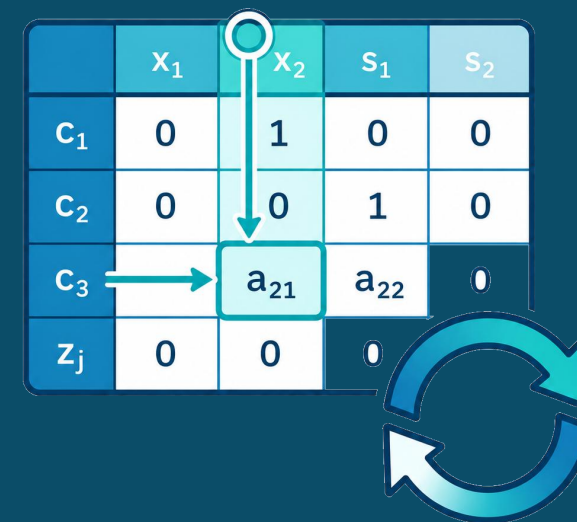
- ✓ Forma standard
 - ✓ Proprietăți algebrice
 - ✓ Soluția de bază
 - ✓ Soluția de bază admisibilă
- ✓ Construcția tabloului simplex
 - ✓ Tabloul simplex inițial
 - ✓ Îmbunătățirea soluției
- ✓ Interpretarea soluției
 - ✓ Interpretarea rezultatelor primei iterații
 - ✓ Căutarea soluției optime
 - ✓ Interpretarea soluției optime
 - ✓ Corespondența cu Excel Solver



La finalul acestui curs, studenții vor putea să:

- explice rolul variabilelor de surplus și al variabilelor artificiale în construirea formei tabelare
- construiască forma tabelară pentru probleme LP cu restricții de tip „ $\leq$ ”, „ $\geq$ ”, „ $=$ ” și cu valori negative în membrul drept
- descrie logica metodei Big-M / a fazei I pentru eliminarea variabilelor artificiale
- transforme o problemă de minimizare într-o problemă echivalentă de maximizare
- identifice cazurile speciale care pot apărea în metoda simplex: soluții inexistente, nemărginite, alternative optime și degenerate

Obiectivele cursului



	x_1	x_2	s_1	s_2
c_1	0	1	0	0
c_2	0	0	1	0
c_3		a_{21}	a_{22}	0
z_j	0	0	0	0

Cuprins

Forma tabelară – generalizare

Forma tabelară – generalizare

Caz simplu

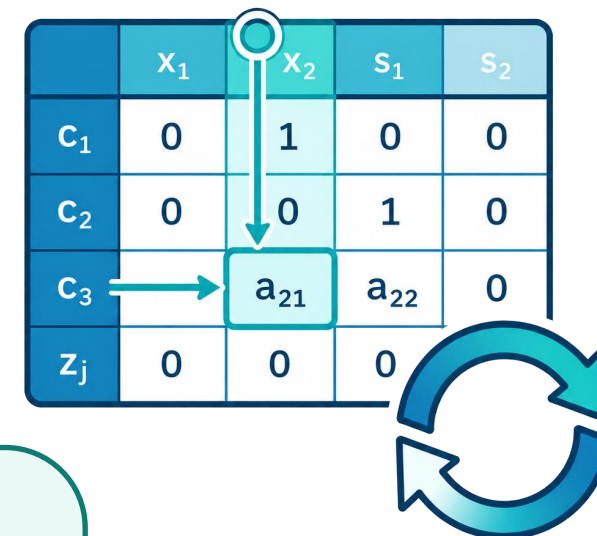
Dacă problema are:

- toate constrângerile de tip „ $\leq$ ”
- termeni liberi nenegativi în membrul drept

forma tabelară se obține direct:

- se adaugă câte o variabilă de reducere pentru fiecare constrângere
- variabilele de reducere formează baza inițială

	x_1	x_2	s_1	s_2
c_1	0	1	0	0
c_2	0	0	1	0
c_3		a_{21}	a_{22}	0
z_j	0	0	0	0



Cazuri speciale de formulare

Dacă problema conține:

- constrângerile de tip „ $\geq$ ” sau „ $=$ ”
- valori negative în membrul drept al constrângerilor

forma tabelară nu se obține direct:

- se introduc variabile de surplus și/sau variabile artificiale
- pot fi necesare transformări înainte de construirea tabloului simplex inițial

Constrângeri de tip „ $\geq$ ”

➤ Reluăm exemplul din cursul anterior și mai adăugăm o constrângere

Ex: O firmă X importă componente electronice pentru a asambla două tipuri de calculatoare: desktop și laptop. Firma dorește să stabilească programul de producție săptămânal pentru cele două produse.

Un sistem desktop aduce un profit de **250 lei/unitate**, iar un laptop aduce un profit de **200 lei/unitate**.

Pentru săptămâna următoare, firma are disponibile cel mult **150 de ore** pentru asamblare. Un sistem desktop necesită **3 ore**, iar un laptop necesită **5 ore** de asamblare.

Firma are pe stoc doar **20 de ecrane** pentru laptopuri; prin urmare, pot fi asamblate cel mult **20 de laptopuri**.

De asemenea, firma poate utiliza cel mult **300 m²** pentru noua producție. Asamblarea unui sistem desktop necesită **8 m²**, iar asamblarea unui laptop necesită **5 m²**.

Noua cerință:

Să presupunem că managerul firmei X dorește să se asigure că **producția totală** pentru cele două modele este de **cel puțin 25 de unități**.

Model matematic

Max	$250x_1$	$+200x_2$		(funcția obiectiv)
s. t.	$3x_1$	$+5x_2$	≤ 150	(timp asamblare)
		$1x_2$	≤ 20	(ecran laptop)
	$8x_1$	$+5x_2$	≤ 300	(capacitate spațiu)
	$1x_1$	$+1x_2$	≥ 25	(producție minimă)
	$x_1,$	x_2	≥ 0	(nenegativitate)

Constrângerea „ $\geq$ ” și variabila de surplus

- Pentru obținerea formei standard folosim **trei variabile de reducere**, pentru constrângerile „ $\leq$ ”, și o **variabilă de surplus**, pentru constrângerea „ $\geq$ ”

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & 250x_1 & +200x_2 & \\ \text{s. t.} & 3x_1 & +5x_2 & \leq 150 \\ & & 1x_2 & \leq 20 \\ & 8x_1 & +5x_2 & \leq 300 \\ & \mathbf{1x_1} & +\mathbf{1x_2} & \geq \mathbf{25} \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Forma standard
a exemplului

$$\begin{array}{llllllll} \text{Max} & 250x_1 & +200x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 & +0s_4 & \\ \text{s. t.} & 3x_1 & +5x_2 & +1s_1 & & & & = 150 \\ & & 1x_2 & & +1s_2 & & & = 20 \\ & 8x_1 & +5x_2 & & & +1s_3 & & = 300 \\ & 1x_1 & +1x_2 & & & & -1s_4 & = 25 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 & \geq 0 \end{array}$$

Soluție inițială neadmisibilă

Dacă procedăm ca în cazul constrângerilor de tip „ $\leq$ ”, am seta variabilele de decizie: $x_1 = x_2 = 0$

- Din ultima constrângere rezultă: $\mathbf{s_4 = -25 < 0}$

Prin urmare, soluția de bază obținută nu este admisibilă

Concluzie: forma standard este echivalentă cu modelul inițial, dar nu permite identificarea directă a unei soluții inițiale de bază admisibile

Introducerea variabilei artificiale

Variabilă artificială

Pentru a obține o soluție inițială de bază admisibilă în forma tabelară, introducem o **variabilă artificială a_4** :

$$x_1 + x_2 - s_4 + a_4 = 25$$

a_4 este un artificiu matematic:

- nu aparține problemei inițiale
- permite pornirea metodei simplex
- identifică restricția cu care este asociată

Prin adăugarea variabilei artificiale, se obține o formă tabelară cu bază inițială:

$$\begin{array}{rrrrrrrrcl} 3x_1 & +5x_2 & +1s_1 & & & & & & & = 150 \\ & 1x_2 & & +1s_2 & & & & & & = 20 \\ 8x_1 & +5x_2 & & & & +1s_3 & & & & = 300 \\ 1x_1 & +1x_2 & & & & & & -1s_4 & +1a_4 & = 25 \end{array}$$

- Variabilele s_1, s_2, s_3 și a_4 formează coloane unitate
- Valorile din membrul drept sunt nenegative

Soluție de bază admisibilă pentru problema modificată

Setând $x_1 = x_2 = s_4 = 0$, obținem: $s_1 = 150, s_2 = 20, s_3 = 300, a_4 = 25$

Această soluție este admisibilă pentru problema modificată, dar nu pentru problema reală:

- variabila artificială a_4 are valoare pozitivă
- producția minimă este satisfăcută doar prin artificul matematic a_4

Metoda Big-M

Scopul variabilei artificiale este doar de a permite construirea unei baze inițiale admisibile

Dacă problema reală este admisibilă, variabilele artificiale trebuie să devină nule în soluția optimă

În **metoda Big-M**, acest lucru se obține prin **penalizarea variabilelor artificiale în funcția obiectiv**

Pentru o problemă de maximizare a firmei X, variabila artificială a_4 este penalizată cu un **coeficient negativ foarte mare**

$$\text{Max } 250x_1 + 200x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 - Ma_4$$

unde $M > 0$ este un număr foarte mare

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_4
C_1	1	0	1	0	0
C_2	0	1	0	1	0
C_3	2	1	0	0	1
Z_j	2	1	0	0	$-M$



Tabloul simplex inițial

$$\begin{array}{llllllll}
 \text{Max} & 250x_1 & +200x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 & +0s_4 & -Ma_4 \\
 \text{s. t.} & 3x_1 & +5x_2 & +1s_1 & & & & = 150 \\
 & & 1x_2 & & +1s_2 & & & = 20 \\
 & 8x_1 & +5x_2 & & & +1s_3 & & = 300 \\
 & 1x_1 & +x_2 & & & & -1s_4 & +1a_4 = 25
 \end{array}$$

Modelul în forma standard cu penalizarea Big-M

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_4	b_i	$\frac{b_i}{a_{i1}}$
		250	200	0	0	0	0	$-M$		
s_1	0	3	5	1	0	0	0	0	150	$150/3 = 50$
s_2	0	0	1	0	1	0	0	0	20	—
s_3	0	8	5	0	0	1	0	0	300	$300/8 = 75/2$
a_4	$-M$	1	1	0	0	0	-1	1	25	$25/1 = 25$
z_j		$-M$	$-M$	0	0	0	M	$-M$	$-25M$	
$c_j - z_j$		$250 + M$	$200 + M$	0	0	0	$-M$	0		

Soluția inițială de bază admisibilă pentru **problema modificată**:
 $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, a_4) = (0, 0, 150, 20, 300, 0, 25)$

Concluzie: x_1 intră în bază, iar variabila artificială a_4 părăsește baza

Rezultatul primei iterații: eliminarea variabilei artificiale

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_4	b_i	$\frac{b_i}{a_{i1}}$
		250	200	0	0	0	0	$-M$		
s_1	0	3	5	1	0	0	0	0	150	$150/3 = 50$
s_2	0	0	1	0	1	0	0	0	20	–
s_3	0	8	5	0	0	1	0	0	300	$300/8 = 75/2$
a_4	$-M$	①	1	0	0	0	-1	1	25	$25/1 = 25$
z_j		$-M$	$-M$	0	0	0	M	$-M$	$-25M$	
$c_j - z_j$		$250 + M$	$200 + M$	0	0	0	$-M$	0		

După prima iterație

- Variabila artificială a_4 a fost eliminată din bază
- Coloana corespunzătoare lui a_4 poate fi suprimată din tabloul simplex

Interpretare

- S-a obținut o soluție de bază fezabilă pentru **problema reală**
- Metoda simplex continuă folosind tabloul fără variabile artificiale

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_4	$\bar{b}_i$
		250	200	0	0	0	0	$-M$	
s_1	0	0	2	1	0	0	3		75
s_2	0	0	1	0	1	0	0		20
s_3	0	0	-3	0	0	1	8		100
x_1	250	1	1	0	0	0	-1		25
z_j		250	250	0	0	0	-250		6250
$c_j - z_j$		0	-50	0	0	0	250		

Continuarea metodei simplex

Concluzie: s_4 intră în bază, iar s_3 părăsește baza

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}_i$
		250	200	0	0	0	0	
s_1	0	0	$\frac{25}{8}$	1	0	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{75}{2}$
s_2	0	0	1	0	1	0	0	20
s_4	0	0	$-\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{25}{2}$
x_1	250	1	$\frac{5}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{75}{2}$
z_j		250	$\frac{625}{4}$	0	0	$\frac{125}{4}$	0	9375
$c_j - z_j$		0	$\frac{175}{4}$	0	0	$-\frac{125}{4}$	0	

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}_i$	$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i6}}$
		250	200	0	0	0	0		
s_1	0	0	2	1	0	0	3	75	$\frac{75}{3} = 25$
s_2	0	0	1	0	1	0	0	20	—
s_3	0	0	-3	0	0	1	8	100	$\frac{100}{8} = \frac{25}{2}$
x_1	250	1	1	0	0	0	-1	25	—
$\bar{b}_i$	z_j	250	250	0	0	0	-250	6250	
$\bar{a}_{i2}$	$c_j - z_j$	0	-50	0	0	0	250		

Tabloul după eliminarea lui a_4

Concluzie: x_2 intră în bază, iar s_1 părăsește baza

Soluția optimă

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}_i$	$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}}$
s_1	0	0	$\frac{25}{8}$	1	0	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{75}{2}$	$\frac{75/2}{25/8} = 12$
s_2	0	0	1	0	1	0	0	20	$\frac{20}{1} = 20$
s_4	0	0	$-\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{25}{2}$	—
x_1	250	1	$\frac{5}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{75}{2}$	$\frac{75/2}{5/8} = 60$
z_j		250	$\frac{625}{4}$	0	0	$\frac{125}{4}$	0	9375	
$c_j - z_j$		0	$\frac{175}{4}$	0	0	$-\frac{125}{4}$	0		



Tabloul final

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}_i$
x_2	200	0	1	$\frac{8}{25}$	0	$-\frac{3}{25}$	0	12
s_2	0	0	0	$-\frac{8}{25}$	1	$\frac{3}{25}$	0	8
s_4	0	0	0	$\frac{3}{25}$	0	$\frac{2}{25}$	1	17
x_1	250	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	30
z_j		250	200	14	0	26	0	9900
$c_j - z_j$		0	0	-14	0	-26	0	

Soluția optimă

Deoarece variabila artificială a_4 a fost eliminată, iar criteriul de optimalitate este îndeplinit ($c_j - z_j \leq 0$ pentru toate coloanele rămase), tabloul final oferă soluția optimă a problemei reale:

- $x_1 = 30, x_2 = 12$, **profit maxim 9900 lei**
- $s_1 = 0, s_2 = 8, s_3 = 0, s_4 = 17$

Observație

Dacă o variabilă artificială rămâne pozitivă în soluția finală, problema reală nu are soluție admisibilă

Constrângeri de tip „=” și variabila artificială

Regulă

Pentru o constrângere de tip „=” :

- nu se introduce variabilă de reducere
- nu se introduce variabilă de surplus
- se adaugă o variabilă artificială a_i , pentru a putea construi forma tabelară

Forma tablou

Exemplu: $x_1 + x_2 = 25$

- Pentru forma tablou: $x_1 + x_2 + a_4 = 25$

Variabila artificială a_4 intră inițial în bază și permite construirea unei soluții inițiale de bază admisibile pentru problema modificată

Observație

Variabila artificială este doar un artificiu matematic

În metoda Big-M, pentru o problemă de maximizare, variabila artificială este penalizată în funcția obiectiv cu $-M$, unde $M > 0$ este foarte mare

Dacă în soluția finală o variabilă artificială rămâne pozitivă, problema reală nu are soluție admisibilă

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_4
C_1	1	0	1	0	0
C_2	0	1	0	1	0
C_3	2	1	0	0	1
Z_j	2	1	0	0	$-M$



Eliminarea valorilor negative din membrul drept: reguli

Regula generală

- Pentru forma tabelară, valorile din membrul drept al constrângerilor trebuie să fie nenegative
- Dacă o constrângere are membrul drept negativ, o înmulțim cu **-1** pentru a obține o constrângere echivalentă cu membrul drept pozitiv

Constrângeri de tip „ $\geq$ ”

Dacă avem o constrângere de forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq -b; \quad b > 0$$

atunci înmulțirea cu **-1** conduce la o constrângere echivalentă de tip „ $\leq$ ”:

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n \leq b$$

Consecință: forma tabelară se obține prin **adăugarea unei variabile de reducere**

Exemplu: $6x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq -20 \xrightarrow{\times(-1)} -6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 20$

Constrângeri de tip „ $=$ ”

Dacă avem o constrângere de forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = -b; \quad b > 0$, atunci înmulțirea cu **-1** conduce la: $-a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n = b$

Consecință: forma tabelară se obține prin **adăugarea unei variabile artificiale**

Observație: în acest caz, semnul egalității nu se schimbă, doar se face pozitiv membrul drept

Eliminarea valorilor negative din membrul drept: reguli (cont.)

Constrângeri de tip „ $\leq$ ”

Dacă avem o constrângere de forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq -b; \quad b > 0$$

atunci, prin înmulțirea cu -1 , constrângerea echivalentă va fi de tip „ $\geq$ ”:

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n \geq b$$

Consecință: forma tabelară se obține prin **scăderea unei variabile de surplus** și **adăugarea unei variabile artificiale**

Ex: Dacă managerul firmei X cere ca numărul de laptopuri să fie cel mult egal cu numărul de desktopuri rămase după reținerea a 5 unități pentru firmă, atunci:

$$x_2 \leq x_1 - 5 \Rightarrow -x_1 + x_2 \leq -5$$

- Membrul drept este negativ, deci înmulțim cu -1

$$x_1 - x_2 \geq 5$$

➤ Apoi forma tablou se obține prin:

- **scăderea unei variabile de surplus** și
- **adăugarea unei variabile artificiale**

$$x_1 - x_2 - s_5 + a_5 \geq 5$$

Cuprins

Forma tabelară – generalizare

Forma tabelară – reguli de transformare

Rezolvarea unei probleme de minimizare

Cazuri speciale

Rezumat

Forma tabelară – reguli de transformare

Mai întâi se corectează membrul drept, apoi se adaugă variabilele necesare în funcție de tipul constrângerii

Membru drept negativ

Dacă o constrângere are membrul drept negativ, se înmulțește cu -1 pentru a obține o constrângere echivalentă cu membrul drept nenegativ

Pentru inegalități, înmulțirea cu -1 schimbă sensul inegalității

Se obține un model LP echivalent

Constrângeri „ $\leq$ ”

Se adaugă o variabilă de reducere

Coeficientul variabilei de reducere în funcția obiectiv este 0

Variabila de reducere poate intra inițial în bază

Constrângeri „ $\geq$ ”

Se scade o variabilă de surplus și se adaugă o variabilă artificială

Coeficientul variabilei de surplus în funcția obiectiv este 0

Variabila artificială are coeficient $-M$ în funcția obiectiv

Variabila artificială intră inițial în bază

Constrângeri „ $=$ ”

Se adaugă o variabilă artificială

Coeficientul variabilei artificiale în funcția obiectiv este $-M$

Variabila artificială intră inițial în bază

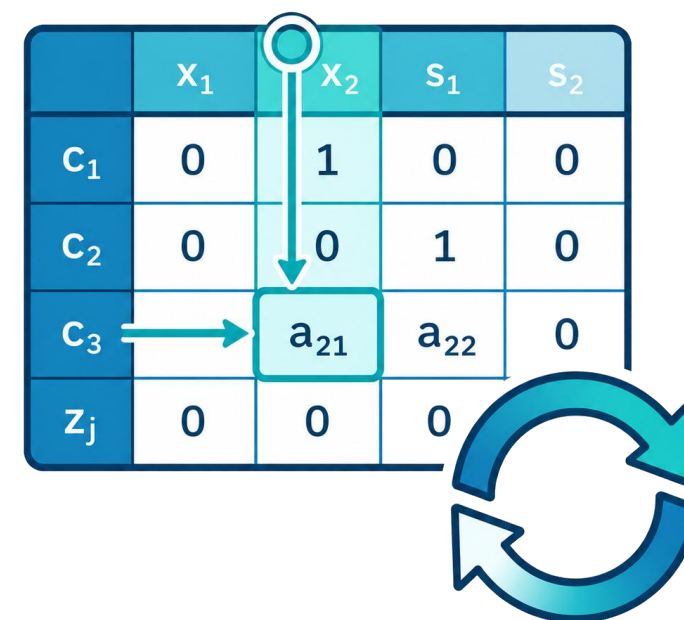
Observații privind forma tabelară

Ce am obținut

- Am transformat constrângerile cu membrul drept negativ în constrângeri echivalente cu membrul drept nenegativ
- Această etapă este necesară deoarece forma tabelară presupune valori nenegative în membrul drept

De ce contează

- Înainte de aplicarea metodei simplex, modelul LP trebuie adus într-o formă care permite identificarea unei soluții inițiale de bază admisibile
- În funcție de tipul constrângerii, se introduc variabile de reducere, de surplus și/sau artificiale



	x_1	x_2	s_1	s_2
C_1	0	1	0	0
C_2	0	0	1	0
C_3		a_{21}	a_{22}	0
Z_j	0	0	0	0

Cuprins

Forma tabelară – generalizare

Forma tabelară – reguli de transformare

Rezolvarea unei probleme de minimizare

Cazuri speciale

Rezumat

Rezolvarea unei probleme de minimizare

- O problemă de minimizare poate fi tratată prin metoda simplex în două moduri:

Abordarea 1: adaptarea regulii simplex

Pentru minimizare, regula de introducere în bază se inversează

- Se alege variabila cu valoarea cea mai negativă din linia $c_j - z_j$
- Soluția este optimă când toate valorile din linia $c_j - z_j$ sunt nule sau pozitive

Abordarea 2: transformarea în maximizare

O problemă de minimizare se poate transforma într-o problemă de maximizare:

$$\min f(x) \Leftrightarrow \max[-f(x)]$$

- După rezolvare, soluția în variabilele de decizie este aceeași, iar valoarea minimă a funcției obiectiv se obține schimbând semnul valorii obținute

În continuare vom **transforma problema de minimizare într-o problemă echivalentă de maximizare**

Problemă de minimizare: exemplu

➤ Vom folosi pentru exemplificare problema fabricii de produse chimice din cursul 2

Ex: O fabrică de produse chimice produce două produsele, A și B, utilizate ca materii prime de companii producătoare de săpunuri și detergenți. Pe baza inventarului curent și a cererii estimate pentru luna următoare, managerii au stabilit că producția totală a produselor A și B trebuie să fie de cel puțin 350 tone. În plus, trebuie onorată comanda unui client important pentru cel puțin 125 tone de produs A.

Produsul A necesită 2 ore de procesare pe tonă, iar produsul B necesită 1 oră de procesare pe tonă. Pentru luna următoare sunt disponibile cel mult 600 ore de procesare.

Costurile de producție sunt de 2 mii lei/tonă pentru produsul A și 3 mii lei/tonă pentru produsul B. Obiectivul managerilor este satisfacerea cererilor de producție cu un cost total minim.

➤ **Modelul matematic**

Min	$2x_1$	$+3x_2$		(funcția obiectiv)
s. t.	$1x_1$		≥ 125	(cerere produs A)
	$1x_1$	$+1x_2$	≥ 350	(producție totală)
	$2x_1$	$+1x_2$	≤ 600	(timp procesare)
	$x_1,$	x_2	≥ 0	(nenegativitate)



Minimizare → maximizare și formă tabelară

Model matematic

$$\begin{array}{llll}
 \text{Min} & 2x_1 & +3x_2 & \text{(funcția obiectiv)} \\
 \text{s. t.} & 1x_1 & & \geq 125 \text{ (cerere produs A)} \\
 & 1x_1 & +1x_2 & \geq 350 \text{ (producție totală)} \\
 & 2x_1 & +1x_2 & \leq 600 \text{ (timp procesare)} \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 \text{ (nenegativitate)}
 \end{array}$$

Pas 1: transformăm problema de minimizare într-o problemă echivalentă de maximizare:

$$\min f(x) \Leftrightarrow \max[-f(x)]$$

Pas 2: pentru forma tabelară

- pentru constrângerile de tip „ $\geq$ ” se scade o **variabilă de surplus** și se adaugă o **variabilă artificială**
 - **variabilele artificiale** sunt penalizate în funcția obiectiv cu $-M$
- pentru constrângerea de tip „ $\leq$ ” se adaugă o **variabilă de reducere**

1

$$\begin{array}{llll}
 \text{Max} & -2x_1 & -3x_2 & \text{(noua funcție obiectiv)} \\
 \text{s. t.} & 1x_1 & & \geq 125 \text{ (cerere produs A)} \\
 & 1x_1 & +1x_2 & \geq 350 \text{ (producție totală)} \\
 & 2x_1 & +1x_2 & \leq 600 \text{ (timp procesare)} \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 \text{ (nenegativitate)}
 \end{array}$$

Formă tabelară

2

$$\begin{array}{llllllll}
 \text{Max} & -2x_1 & -3x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 & -Ma_1 & -Ma_2 \\
 \text{s. t.} & 1x_1 & & -1s_1 & & & +1a_1 & \\
 & 1x_1 & +1x_2 & & -1s_2 & & & +1a_2 \\
 & 2x_1 & +1x_2 & & & +1s_3 & & \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3, & a_1, & a_2 \geq 0
 \end{array}$$

Rezultat

Problema de minimizare a fost transformată într-o problemă de maximizare echivalentă
Modelul a fost adus în formă tabelară și se poate construi tabloul simplex inițial

Tabloul simplex inițial și prima iterație

Tabloul simplex inițial

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	b_i	$\frac{b_i}{a_{i1}}$
		-2	-3	0	0	0	-M	-M		
a_1	-M	①	0	-1	0	0	1	0	125	$125/1 = 125$
a_2	-M	1	1	0	-1	0	0	1	350	$350/1 = 350$
s_3	0	2	1	0	0	1	0	0	600	$600/2 = 300$
z_j		-2M	-M	M	M	0	-M	-M	$-475M$	
$c_j - z_j$		$-2 + 2M$	$-3 + M$	-M	-M	0	0	0		

Max	$-2x_1$	$-3x_2$	$+0s_1$	$+0s_2$	$+0s_3$	$-Ma_1$	$-Ma_2$		
s. t.	$1x_1$		$-1s_1$			$+1a_1$		$= 125$	
	$1x_1$	$+1x_2$		$-1s_2$			$+1a_2$	$= 350$	
	$2x_1$	$+1x_2$			$+1s_3$			$= 600$	
	$x_1,$	$x_2,$	$s_1,$	$s_2,$	$s_3,$	$a_1,$	a_2	≥ 0	

Forma tabelară

Concluzie: x_1 intră în bază, iar a_1 părăsește baza

Iterația 1

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_2	$\bar{b}_i$	$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}}$
		-2	-3	0	0	0	-M		
x_1	-2	1	0	-1	0	0	0	125	-
a_2	-M	0	1	1	-1	0	1	225	$225/1 = 225$
s_3	0	0	1	2	0	1	0	350	$350/2 = 175$
z_j		-2	-M	$2 - M$	M	0	-M	$-250 - 225M$	
$c_j - z_j$		0	$-3 + M$	$-2 + M$	-M	0	0		

Iterația 2: alegerea noii variabile de intrare

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_2	$\bar{b}_i$	$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}}$
		-2	-3	0	0	0	-M		
x_1	-2	1	0	-1	0	0	0	125	-
a_2	-M	0	1	1	-1	0	1	225	$225/1 = 225$
s_3	0	0	1	2	0	1	0	350	$350/2 = 175$
z_j		-2	-M	$2 - M$	M	0	-M	$-250 - 225M$	
$c_j - z_j$		0	$-3 + M$	$-2 + M$	-M	0	0		

Concluzie: s_1 intră în bază, iar s_3 părăsește baza

Iterația 2

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_2	$\bar{b}_i$	$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}}$
		-2	-3	0	0	0	-M		
x_1	-2	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	300	$\frac{300}{1/2} = 600$
a_2	-M	0	$1/2$	0	-1	$-1/2$	1	50	$\frac{50}{1/2} = 100$
s_1	0	0	$1/2$	1	0	$1/2$	0	175	$\frac{175}{1/2} = 350$
z_j		-2	$-1 - M/2$	0	M	$-1 + M/2$	-M	$-600 - 50M$	
$c_j - z_j$		0	$-2 + M/2$	0	-M	$1 - M/2$	0		

Soluția optimă după eliminarea variabilelor artificiale

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_2	$\bar{b}_i$	$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}}$
		-2	-3	0	0	0	-M		
x_1	-2	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	300	$\frac{300}{1/2} = 600$
a_2	-M	0	$1/2$	0	-1	$-1/2$	1	50	$\frac{50}{1/2} = 100$
s_1	0	0	$1/2$	1	0	$1/2$	0	175	$\frac{175}{1/2} = 350$
z_j		-2	$-1 - M/2$	0	M	$-1 + M/2$	-M	-600 - 50M	
$c_j - z_j$		0	$-2 + M/2$	0	-M	$1 - M/2$	0		



Concluzie: x_2 intră în bază, iar a_2 părăsește baza



Iterația 3

Tablou simplex final

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}_i$
		-2	-3	0	0	0	
x_1	-2	1	0	0	1	1	250
x_2	-3	0	1	0	-2	-1	100
s_1	0	0	0	1	1	1	125
z_j		-2	-3	0	4	1	-800
$c_j - z_j$		0	0	0	-4	-1	

Soluția optimă

Deoarece variabilele artificiale a_1 și a_2 au fost eliminate, iar criteriul de optimalitate este îndeplinit, tabloul final oferă soluția optimă a problemei reale:

- $x_1 = 250$, $x_2 = 100$, **cost minim 800 mii lei**
- $s_1 = 125$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$

Observație: dacă o variabilă artificială rămâne pozitivă în soluția finală, problema reală nu are soluție admisibilă

Cuprins

Forma tabelară – generalizare

Forma tabelară – reguli de transformare

Rezolvarea unei probleme de minimizare

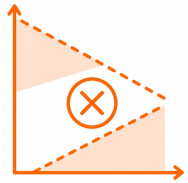
Cazuri speciale

- Soluții inexistente / nefezabile
- Soluții nemărginite
- Soluții alternative optime
- Soluții degenerate

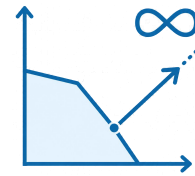
Rezumat

Cazuri speciale în metoda simplex

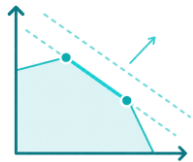
➤ Și în metoda simplex pot apărea cazurile speciale discutate la rezolvarea grafică:



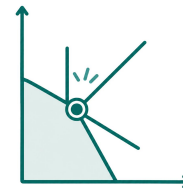
1) Soluții inexistente / nefezabile



2) Soluții nemărginite



3) Soluții alternative optime

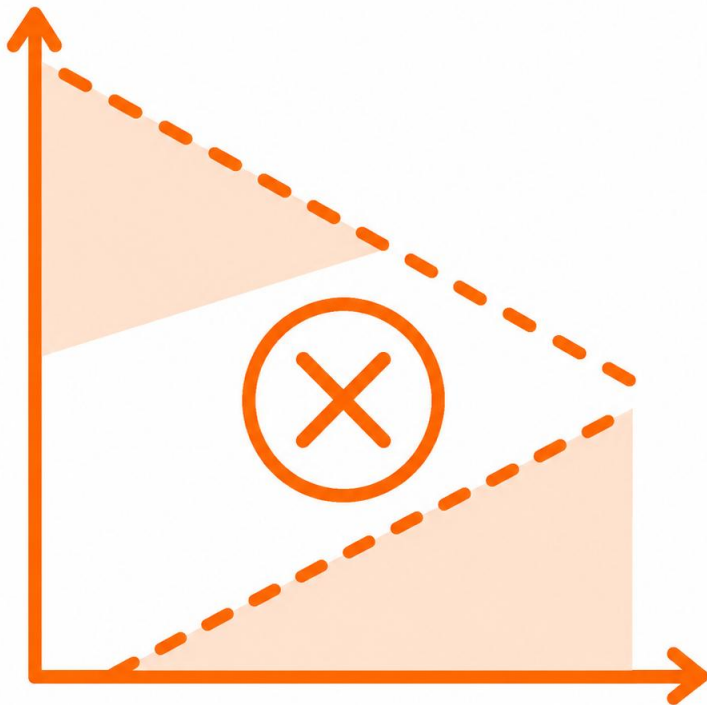


4) Soluții degenerate

Observație

Aceste cazuri pot fi identificate prin analiza tablourilor simplex obținute pe parcursul algoritmului

Soluții inexistente / nefezabile



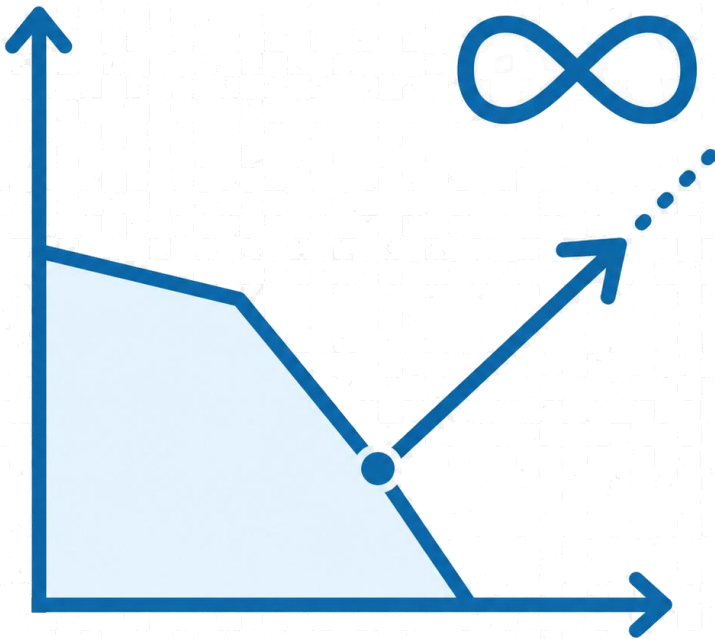
O problemă LP este **nefezabilă** dacă nu există nicio soluție care să satisfacă simultan toate constrângerile, inclusiv condițiile de nenegativitate

În metoda simplex, **nefezabilitatea** poate fi identificată la finalul etapei de eliminare a variabilelor artificiale:

- dacă rămâne cel puțin o variabilă artificială cu valoare pozitivă, problema inițială nu are soluție admisibilă

Pentru problemele în care toate constrângerile sunt de tip „ $\leq$ ”, membrul drept este nenegativ și variabilele sunt nenegative, soluția $x = 0$ este fezabilă

Soluții nemărginite



O problemă LP de maximizare are **soluție nemărginită** dacă valoarea funcției obiectiv poate crește la infinit fără încălcarea constrângerilor

În metoda simplex, dacă o variabilă urmează să intre în bază, dar toate elementele din coloana pivot sunt ≤ 0 , atunci nu există linie pivot

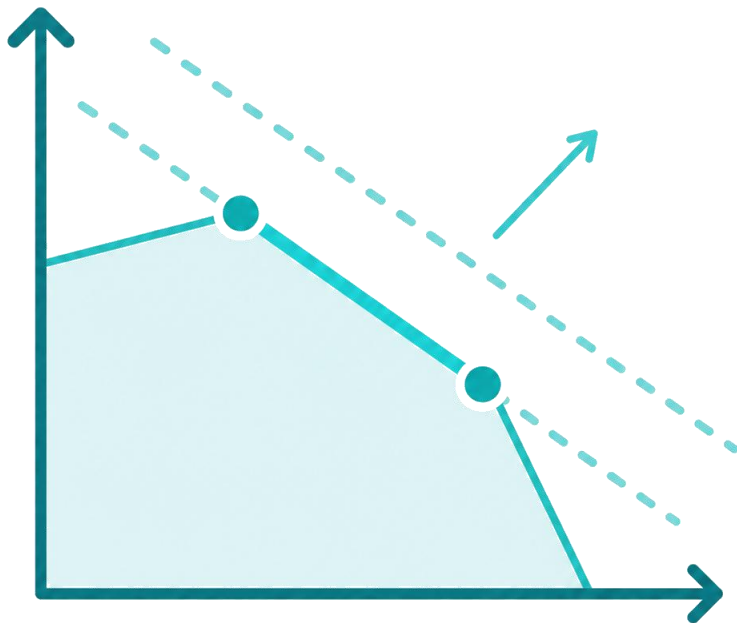
Consecință: variabila poate crește nelimitat, iar valoarea funcției obiectiv se îmbunătățește fără limită

Observație

Într-un model economic realist și corect formulat, o soluție nemărginită nu ar trebui să apară

Dacă apare, de regulă indică o eroare de formulare sau lipsa unor constrângeri importante

Soluții alternative optimale



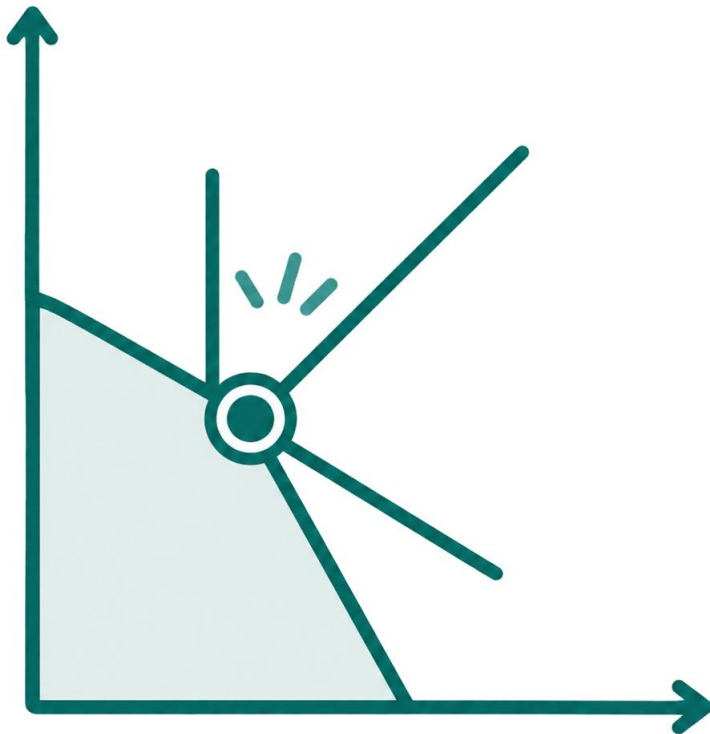
O problemă LP are **soluții alternative optimale** dacă există două sau mai multe soluții fezabile diferite care conduc la aceeași valoare optimă a funcției obiectiv

În tabloul simplex final, dacă o variabilă secundară are valoarea 0 în linia de evaluare netă $c_j - z_j$, atunci poate exista o **soluție optimă alternativă**

Dacă această variabilă poate fi introdusă în bază, se obține o altă soluție optimă, cu aceeași valoare a funcției obiectiv

Această variabilă poate fi introdusă în bază fără modificarea valorii funcției obiectiv

Soluții degenerare



O soluție de bază admisibilă este **degenerată** dacă una sau mai multe variabile de bază au valoarea zero

Degenerarea poate apărea:

- din formularea problemei
- când testul raportului minim produce un raport egal cu zero
- când există egalitate între mai multe rapoarte minime

Observație

În prezența degenerării, pot apărea pivotări care nu modifică valoarea funcției obiectiv

De aceea, algoritmul poate efectua una sau mai multe iterații fără îmbunătățirea valorii funcției obiectiv

Observații

Variable artificiale și nefezabilitatea

Dacă, la finalul etapei de eliminare, cel puțin o variabilă artificială are valoare pozitivă, problema inițială nu are soluție admisibilă

O variabilă artificială poate rămâne în bază cu valoarea zero fără ca problema să fie nefezabilă

- În acest caz, soluția de bază este degenerată

Regiune fezabilă nemărginită vs. problemă nemărginită

O regiune fezabilă nemărginită nu implică automat o soluție nemărginită

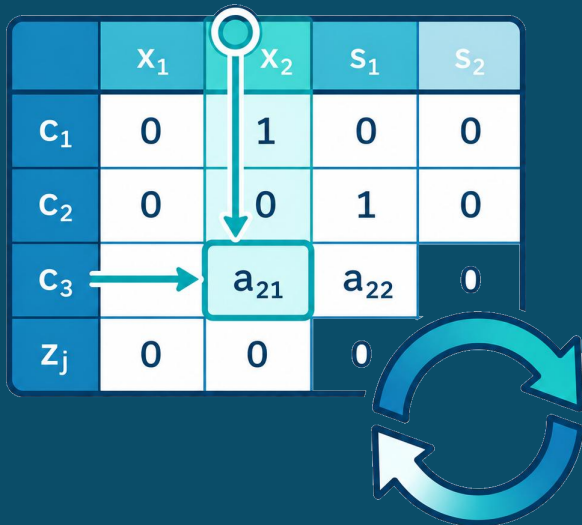
Problema este nemărginită doar dacă funcția obiectiv se poate îmbunătăți nelimitat într-o direcție fezabilă

Rezumat



- În cursurile 12 și 13 am introdus metoda simplex ca procedură algebrică pentru rezolvarea problemelor de programare liniară
- Metoda simplex poate fi aplicată manual pentru probleme LP mici, dar pentru probleme cu multe variabile și constrângeri sunt necesare pachete software specializate
- Multe pachete software utilizează variante ale metodei simplex sau algoritmi derivați pentru rezolvarea problemelor LP
- Am prezentat modul în care un model LP este adus în forma tabelară necesară aplicării metodei simplex:
 - constrângeri de tip „ $\leq$ ”
 - constrângeri de tip „ $\geq$ ”
 - constrângeri de tip „ $=$ ”
 - constrângeri cu membru drept negativ

Rezumat



	x_1	x_2	s_1	s_2
c_1	0	1	0	0
c_2	0	0	1	0
c_3		a_{21}	a_{22}	0
z_j	0	0	0	0

- Pentru constrângerile de tip „ $\geq$ ” și „ $=$ ”, sunt necesare variabile artificiale pentru construirea formei tabelare
- În metoda Big-M, fiecărei variabile artificiale i se atribuie un coeficient de penalizare foarte mare în funcția obiectiv
 - $-M$ pentru probleme de maximizare
 - $+M$ pentru probleme de minimizare, dacă problema este tratată direct ca minimizare
- Dacă problema reală este fezabilă, variabilele artificiale trebuie eliminate din soluție sau trebuie să aibă valoarea zero înainte de atingerea optimului
- Iterațiile necesare pentru eliminarea variabilelor artificiale formează faza I a metodei simplex
- Pentru problemele de minimizare, am discutat două abordări:
 - adaptarea regulii de introducere în bază și a criteriului de optimalitate
 - transformarea problemei de minimizare într-o problemă echivalentă de maximizare
- După rezolvarea problemei de maximizare echivalente, valoarea optimă a problemei inițiale se obține schimbând semnul funcției obiectiv

Rezumat

Idei-cheie:

- formă tabelară
- bază
- pivot
- criteriu de optimalitate



Rezumat

Forma tabelară – generalizare